

**Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»**

**Навчально-науковий інститут фізики, математики
та інформаційних технологій
Кафедра алгебри та системного аналізу**

Жидков Євген Юрійович

ПРО ОДИН КЛАС ТРІОЇДІВ

**кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
за спеціальністю 111 «Математика»**

Особистий підпис –



Євген ЖИДКОВ

Науковий керівник –



Анатолій ЖУЧОК,
доктор фізико-математичних наук,
проректор з науково-педагогічної роботи,
професор кафедри алгебри
та системного аналізу

Завідувач кафедри –



Юрій ЖУЧОК,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри алгебри
та системного аналізу

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. ПРЯМОКУТНІ ТРІОЇДИ	6
1.1. Основні визначення	6
1.2. Приклади прямокутних тріоїдів	7
1.3. Вільні прямокутні тріоїди.....	10
Висновки до розділу 1	12
РОЗДІЛ 2. ДЕКОМПОЗИЦІЯ	13
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА ТРІОЇДІВ	23
3.1. rs -тріоїди	23
3.2. Доведення основного результату	24
Висновки до розділу 3	38
ВИСНОВКИ	39
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	40

ВСТУП

Актуальність теми. Одним із змістовних класів алгебраїчних систем є клас тріюїдів. Множина (векторний простір) T , наділена (наділений) трьома бінарними асоціативними операціями \dashv , \vdash та \perp , що задовольняють наступним умовам:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \quad (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \quad (T8)$$

для всіх $x, y, z \in T$, називається *тріюїдом (тріалгеброю)* [2]. Теорія тріюїдів бере свій початок з основоположної праці Ж.-Л. Лоде та М.О. Ронко [2] і має широке застосування в теорії триалгебр. Поняття триалгебри та тріюїда виникли в контексті алгебраїчної топології під час дослідження планарних дерев. Триалгебри та тріюїди мають зв'язки з алгебрами Хопфа, алгебрами Лейбніца та операторами Рота–Бакстера. Першим результатом про тріюїди є опис Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [2] вільного тріюїда рангу 1. Тріюїди є предметом вивчення оглядової статті А. В. Жучка [11]. Ще однією причиною нашого інтересу до тріюїдів є їх зв'язок з дімоноїдами [3, 6]. Якщо дві конкретні операції тріюїда (тріалгебри) збігаються, то отримуємо поняття дімоноїда (діалгебри). Поняття діалгебри та дімоноїда були введені Ж.-Л. Лоде під час вивчення феномену періодичності в алгебраїчній K -теорії. У 2014 році з'явилася монографія, присвячена вивченню властивостей дімоноїдів [16]. Поняття триалгебри базується на понятті тріюїда, і всі результати, отримані для тріюїдів, можуть бути застосовані до триалгебр. Цей зв'язок між тріюїдами та

триалгебрами дає одну з головних мотивацій для вивчення тріюїдів. Отже, виходячи з вищенаведеного, можна зробити висновок, що вивчення тріюїдів є досить актуальною темою, яка потребує різноманітних досліджень.

Дана наукова робота присвячена дослідженню саме тріюїдів. У ній розв'язується наступна відкрита проблема.

Проблема. Чи існують тріюїди з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи є прямокутними напівгрупами та не є сполуками?

Ця проблема виникла вперше при вивченні допельнапівгруп [13], тобто алгебр з двома асоціативними операціями, які задовольняють дві додаткові умови. Так, відомо [14, 13], що існують допельнапівгрупи з різними операціями, у яких дві напівгрупи є прямокутними, але не існує допельнапівгруп з різними операціями, у яких дві напівгрупи є прямокутними сполуками. Для тріюїдів у роботі [12] було показано, що існують тріюїди з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи є прямокутними сполуками. При цьому вказана вище проблема залишалась до цього часу відкритою.

Основні результати роботи. У роботі введено поняття rs -тріюїда, тобто тріюїда з трьома прямокутними напівгрупами. Основним результатом є побудова нового класу rs -тріюїдів з попарно різними операціями (теорема 2.1).

Новизна та оригінальність ідей. У науковій роботі отримано новий результат, а саме: побудовано клас тріюїдів, у яких три напівгрупи є прямокутними та неїдемпотентними. При цьому слід відзначити, що спосіб побудови тріюїдної конструкції є досить оригінальним та неочевидним, оскільки бінарні операції визначаються у такий спосіб, при якому добутки довільних елементів довільної множини дорівнюють четвірці елементів з цієї множини.

Методи дослідження – загальноалгебраїчні з використанням основних методів теорії напівгруп. Нестандартність цих методів обумовлена тим, що вони адаптовані до алгебр з трьома операціями.

Практичне та теоретичне значення одержаних результатів. Результати роботи є новими. Вони мають теоретичне значення як такі, що є внеском у

подальший розвиток теорії тріюїдів та триалгебр. Результати роботи можуть бути використані на факультативних заняттях з математики для учнів старших класів.

Наукові публікації. За даним напрямом досліджень автор має наукову публікацію [15].

Структура роботи. Наукова робота складається з двох розділів. У першому розділі розглянуто поняття прямокутної трисполуки та наведено приклади прямокутних трисполук (леми 1.1–1.4). Представлено вільну прямокутну трисполуку (теорема 1.5) та охарактеризовано її групу автоморфізмів (лема 1.7). У другому розділі введено поняття rs -тріюїда, тобто тріюїда з трьома прямокутними напівгрупами. Основним результатом роботи є побудова нового класу rs -тріюїдів з попарно різними операціями (теорема 2.1). Робота оформлена згідно вимог, що ставляться до написання наукових робіт з математики.

Апробація результатів наукової роботи. Результати роботи представлено на I Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених. «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2020» Форум молодих дослідників» (м. Суми) та на Алгебраїчному семінарі Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ).

РОЗДІЛ 1. ПРЯМОКУТНІ ТРІОЇДИ

Перший крок у дослідженні ідемпотентних напівгруп зробив Девід Маклін [4], який використовував прямокутні сполуки для опису структури довільної сполуки. Прямокутні дімоноїди (прямокутні дісполуки) вперше з'явилися у дослідженнях структури дісполук піддімоноїдів, див. [5]. За допомогою прямокутних дісполук була дана структурна теорема про ідемпотентні дімоноїди [6]. Вільна прямокутна дісполука була побудована в [7].

У цьому розділі введено основні визначення теорії тріоїдів, які використовуються у роботі, представлено приклади прямокутних трисполук і побудовано вільну прямокутну трисполуку довільного рангу [12].

1.1. Основні визначення

Непорожня підмножина A тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається *підтріоїдом*, якщо для будь яких $a, b \in T$ з $a, b \in A$ випливає $a \dashv b, a \vdash b, a \perp b \in A$. Ідемпотентна напівгрупа S називається *прямокутною сполукою*, якщо

$$xux = x$$

для всіх $x, u \in S$. Зрозуміло, що в будь-якій прямокутній сполуці виконується тотожність:

$$xuz = xz.$$

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається *ідемпотентним тріоїдом* або *трисполукою* [10], якщо напівгрупи (T, \dashv) , (T, \vdash) і (T, \perp) є ідемпотентними напівгрупами. Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається *прямокутним тріоїдом* або *прямокутною трисполукою*, якщо напівгрупи (T, \dashv) , (T, \vdash) і (T, \perp) є прямокутними сполуками.

Зауважимо, що клас усіх прямокутних трисполук є підмноговидом многовиду тріоїдів. Тріоїд, вільний у многовиді прямокутних трисполук, називається *вільною прямокутною трисполукою* [12].

Нагадаємо, що непорожня множина D з двома бінарними асоціативними операціями \dashv і \vdash , які задовольняють аксіомам $(T1) - (T3)$, називається *дімоноїдом* [3, 6]. Якщо $D = (D, \dashv, \vdash)$ є дімоноїдом, то тріоїд $(D, \dashv, \vdash, \dashv)$

(відповідно, $(D, \dashv, \vdash, \vdash)$) позначається через $(D)^{\dashv}$ (відповідно, $(D)^{\vdash}$). Зрозуміло, що $(D)^{\dashv}$ і $(D)^{\vdash}$ є різними як тріоїди, але вони збігаються як дімоноїди.

Розглянемо наступні приклади дімоноїдів [7].

Нехай X – довільна непорожня множина. Нехай далі $X_{\ell z} = (X, \dashv)$, $X_{rz} = (X, \vdash)$, $X_{rb} = X_{\ell z} \times X_{rz}$ – напівгрупа лівих нулів, напівгрупа правих нулів та прямокутна сполука відповідно. Згідно з [7] $X_{\ell z, rz} = (X, \dashv, \vdash)$ – дімоноїд лівих і правих нулів.

Визначимо операції \dashv і \vdash на X^2 за правилами:

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, b),$$

$$(x, y) \vdash (a, b) = (a, b),$$

для всіх $(x, y), (a, b) \in X^2$. Згідно з [7] (X^2, \dashv, \vdash) – вільний (rb, rz) -дімоноїд.

Визначимо операції \dashv and \vdash на X^2 за правилами:

$$(x, y) \dashv (a, b) = (x, y),$$

$$(x, y) \vdash (a, b) = (x, b)$$

для всіх $(x, y), (a, b) \in X^2$. Згідно з [7] (X^2, \dashv, \vdash) – вільний $(\ell z, rb)$ -дімоноїд.

Визначимо операції \dashv і \vdash на X^3 за правилами:

$$(x_1, x_2, x_3) \dashv (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, y_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \vdash (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_2, y_3)$$

для всіх $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X^3$. Алгебра (X^3, \dashv, \vdash) позначається $FRct(X)$.

Відповідно до теореми 1 [7] $FRct(X)$ – вільна прямокутна дісполука.

Як завжди, \mathbb{N} позначає множину всіх додатних цілих чисел.

1.2. Приклади прямокутних тріоїдів

У цьому розділі наведено приклади прямокутних трисполук і побудовано вільну прямокутну трисполуку довільного рангу [12].

Спочатку наведемо приклади прямокутних трисполук [12].

Нехай $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $n > 1$, і нехай $\{X_i\}_{i \in I_n}$ – сім'я довільних непорожніх множин X_i , $i \in I_n$. Визначимо операції \dashv , \vdash і \perp на $\prod_{i \in I_3} X_i$ таким чином:

$$(a_1, b_1, c_1) \dashv (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_1),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \vdash (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2)$$

для всіх $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in \prod_{i \in I_3} X_i$. Зрозуміло, що $(\prod_{i \in I_3} X_i, \perp, \vdash)$ є прямокутною дісполукою [7] і $(\prod_{i \in I_3} X_i, \neg)$ є напівгрупою лівих нулів.

Лема 1.1. $(\prod_{i \in I_3} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Визначимо операції \neg, \vdash і \perp на $\prod_{i \in I_3} X_i$ за правилами:

$$(a_1, b_1, c_1) \neg (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \vdash (a_2, b_2, c_2) = (a_2, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2)$$

для всіх $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in \prod_{i \in I_3} X_i$. Зрозуміло, що $(\prod_{i \in I_3} X_i, \neg, \perp)$ є прямокутною дісполукою [7] і $(\prod_{i \in I_3} X_i, \vdash)$ є напівгрупою правих нулів.

Лема 1.2. $(\prod_{i \in I_3} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Визначимо операції \neg, \vdash і \perp на $\prod_{i \in I_2} X_i$ за правилами:

$$(a_1, b_1) \neg (a_2, b_2) = (a_1, b_1), (a_1, b_1) \vdash (a_2, b_2) = (a_2, b_2),$$

$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$

для всіх $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \prod_{i \in I_2} X_i$. Зрозуміло, що $(\prod_{i \in I_2} X_i, \neg, \vdash)$ – дімоноїд лівих і правих нулів [7], а $(\prod_{i \in I_2} X_i, \perp)$ – прямокутна сполука.

Лема 1.3. $(\prod_{i \in I_2} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Якщо $X_i = X$ для всіх $i \in I_2$, то алгебра $(\prod_{i \in I_2} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ позначається через $X_{lz, rz}^{rb}$. Звернемо увагу, що тріоїд $X_{lz, rz}^{rb}$ був вперше побудований в [10].

Визначимо операції \neg, \vdash і \perp на $\prod_{i \in I_{2k}} X_i$, де $k \in \mathbb{N}$, за правилами:

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \neg (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, y_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) = (x_1, y_2, \dots, y_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k})$$

для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_{2k}), (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \in \prod_{i \in I_{2k}} X_i$.

Лема 1.4. Для будь-якого $k > 1$, $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Доведення. За лемою 4 [7] $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ задовольняє аксіоми (T1) – (T3) тріюїда та операції \neg, \vdash є асоціативними. Для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_{2k}), (y_1, y_2, \dots, y_{2k}), (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) \in \prod_{i \in I_{2k}} X_i$ отримуємо

$$\begin{aligned}
& ((x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_{2k})) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k}) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp ((y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k})), \\
& ((x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \neg (y_1, y_2, \dots, y_{2k})) \neg (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, y_{2k}) \neg (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, z_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \neg (y_1, y_2, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \neg ((y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k})), \\
& ((x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_{2k})) \neg (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k}) \neg (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k-1}, z_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_{2k-1}, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp ((y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \neg (z_1, z_2, \dots, z_{2k})), \\
& ((x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \neg (y_1, y_2, \dots, y_{2k})) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, y_{2k}) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp ((y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \vdash (z_1, z_2, \dots, z_{2k})), \\
& ((x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash (y_1, y_2, \dots, y_{2k})) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, y_2, \dots, y_{2k}) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, y_2, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash (y_1, y_2, \dots, y_k, z_{k+1}, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash ((y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \perp (z_1, z_2, \dots, z_{2k})), \\
& ((x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_{2k})) \vdash (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k}) \vdash (z_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, z_2, \dots, z_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash (y_1, z_2, \dots, z_{2k}) = \\
& = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash ((y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \vdash (z_1, z_2, \dots, z_{2k})).
\end{aligned}$$

Таким чином, $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ задовольняє аксіомам (T4) – (T8) тріюїда та операція \perp є асоціативною і отже, маємо тріюїд. Очевидно, $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ є ідемпотентним. Покажемо, що це прямокутна трисполука. Маємо

$$\begin{aligned} & (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \neg (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \neg (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = \\ & = (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, y_{2k}) \neg (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}), \\ & (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \vdash (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \vdash (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = \\ & = (x_1, y_2, \dots, y_{2k}) \vdash (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}), \\ & (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) \perp (y_1, y_2, \dots, y_{2k}) \perp (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = \\ & = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_{2k}) \perp (x_1, x_2, \dots, x_{2k}) = (x_1, x_2, \dots, x_{2k}). \end{aligned}$$

Таким чином, $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ – прямокутна трисполука.

Лему доведено.

Очевидно, що операції $(\prod_{i \in I_2} X_i, \neg, \vdash, \perp)$ збігаються і це прямокутна сполука.

Нехай X – довільна непорожня множина. Тріюїд $(X^4, \neg, \vdash, \perp)$ позначається через $FRT(X)$.

1.3. Вільні прямокутні тріюїди

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема, див. [12].

Теорема 1.5. $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука.

Доведення. За лемою 1.4 $FRT(X)$ – прямокутна трисполука. Нехай $(T, \neg', \vdash', \perp')$ – довільний прямокутний тріюїд і $\sigma: X \rightarrow T$ – довільне відображення. Визначимо відображення

$$\begin{aligned} \tau: FRT(X) & \rightarrow (T, \neg', \vdash', \perp'): \\ (a, b, c, d) & \mapsto (a, b, c, d)\tau = (a\sigma \vdash' b\sigma) \perp' (c\sigma \neg' d\sigma). \end{aligned}$$

Для того, щоб довести, що τ є гомоморфізмом, будемо використовувати аксіоми тріюїда та тотожності прямокутної сполуки. Отримуємо

$$\begin{aligned} ((a_1, b_1, c_1, d_1) \neg (a_2, b_2, c_2, d_2))\tau & = (a_1, b_1, c_1, d_2)\tau = \\ & = (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \neg' d_2\sigma) = \\ & = (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' ((c_1\sigma \neg' d_1\sigma) \neg' (c_2\sigma \neg' d_2\sigma)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \dashv' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) = \\
&= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \dashv' (a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \dashv' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) = \\
&= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \dashv' \\
&\dashv' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = (a_1, b_1, c_1, d_1)\tau \dashv' (a_2, b_2, c_2, d_2)\tau, \\
&((a_1, b_1, c_1, d_1) \vdash (a_2, b_2, c_2, d_2))\tau = (a_1, b_2, c_2, d_2)\tau = \\
&(a_1\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) = \\
&= a_1\sigma \vdash' (b_2\sigma \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= a_1\sigma \vdash' ((b_2\sigma \vdash' a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= a_1\sigma \vdash' ((b_2\sigma \vdash' (a_2\sigma \vdash' b_2\sigma)) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= a_1\sigma \vdash' (b_2\sigma \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma))) = \\
&= a_1\sigma \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= a_1\sigma \vdash' b_1\sigma \vdash' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma) \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \vdash' ((c_1\sigma \dashv' d_1\sigma) \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma))) = \\
&= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \vdash' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= (a_1, b_1, c_1, d_1)\tau \vdash' (a_2, b_2, c_2, d_2)\tau, \\
&((a_1, b_1, c_1, d_1) \perp (a_2, b_2, c_2, d_2))\tau = (a_1, b_1, c_2, d_2)\tau = \\
&= (a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma) = \\
&= ((a_1\sigma \vdash' b_1\sigma) \perp' (c_1\sigma \dashv' d_1\sigma)) \perp' ((a_2\sigma \vdash' b_2\sigma) \perp' (c_2\sigma \dashv' d_2\sigma)) = \\
&= (a_1, b_1, c_1, d_1)\tau \perp' (a_2, b_2, c_2, d_2)\tau.
\end{aligned}$$

Таким чином, τ є гомоморфізмом і $FRT(X)$ вільний.

Теорему доведено.

Наслідок 1.6. Вільна прямокутна триполюка $FRT(X)$, породжена скінченною множиною X , є скінченною. Зокрема, якщо $|X| = n$, то $|FRT(X)| = n^4$.

Позначимо симетричну групу на X через $\mathfrak{S}[X]$ і групу автоморфізмів тріюїда M через $Aut M$. Неважко помітити, що $FRT(X)$ породжується множиною $\{(a, a, a, a) \mid a \in X\}$. Отримано наступний опис групи автоморфізмів вільної прямокутної трисполюки [12].

Лема 1.7. $Aut FRT(X) \cong \mathfrak{S}[X]$.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі наведено основні визначення теорії тріоїдів, які необхідні у роботі. Основним результатом є побудова вільної прямокутної трисполуки. Також підраховано кількість елементів вільної прямокутної трисполуки у скінченному випадку та описано групу автоморфізмів вільної прямокутної трисполуки.

РОЗДІЛ 2. ДЕКОМПОЗИЦІЯ

У цьому розділі в термінах трисполук підтріюїдів ми описуємо структуру вільних тріюїдів і характеризуємо найменшу конгруентність прямокутної сполуки, найменшу ліву нульову конгруентність і найменшу праву нульову конгруентність на вільному тріюїді .

Далі ми згадаємо побудову трисполуки підтріюїда [10].

Нехай S буде вільним тріюїдом, J буде трисполукою і нехай $\alpha: S \rightarrow J: x \mapsto x\alpha$ буде гомоморфізмом. Тоді кожен клас конгруенції $\Delta_\alpha \in$ підтріюїдом тріюїда S , і тріюїд S сам є об'єднанням таких тріюїдів $S_\xi, \xi \in J$ тому

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x, t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \dashv S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \dashv \varepsilon},$$

$$S_\xi \vdash S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \emptyset.$$

У цьому випадку ми говоримо, що S декомпозиція трисполуки підтріюїда (або S трисполука J підтріюїда $S_\xi (\xi \in J)$). Якщо J є ідемпотентною підгрупою (сполукою), тоді ми говоримо що S це сполука J підтріюїда $S_\xi (\xi \in J)$. Якщо J комутативна сполука, тоді ми говоримо що S напіврешітка J підтріюїда $S_\xi (\xi \in J)$. Якщо J є напівгрупою лівих (правих) нулів, тоді ми говоримо, що S ліва (права) сполука J підтріюїда $S_\xi (\xi \in J)$.

Нехай $w \in F[X]$ і $w \in Frt(Y)$. Позначимо першу (відповідно останню) букву w за $w^{(0)}$ (відповідно, $w^{(1)}$). Припустимо, що u і s є початковою (відповідно кінцевою) підсловом w з мінімальною довжиною такою, що $u^{(1)} \in \bar{Y}$ (відповідно, $u^{(0)} \in \bar{Y}$).

В цьому випадку $\widetilde{u}^{(1)}$ (відповідно, $\widetilde{u}^{(0)}$) будемо позначати $w^{[0]}$ (відповідно, $w^{[1]}$). Для всіх $w \in F[X]$ множину всіх букв, що зустрічаються в w будемо позначати $c(w)$ і для кожного $w \in Frt(Y)$ припустимо $\tilde{c}(w) = c(\tilde{w})$.

Візьмемо довільну непорожню скінченну підмножину C з Y . Нехай $B^C(Y)$ буде множиною всіх скінченних підмножин A з Y таких, що $C \subseteq A$ і нехай $B_C(Y)$ буде напіврешіткою визначеною на $B^C(Y)$ з операцією теоретичного об'єднання множин.

Нехай $i, j, k, s \in Y$,

$$L = \{(i, j, k, s), (i, j, k), [i, j, k], [i, j], (i, j), (i, j], [i, j], (i), [i]\}$$

і

$$U_{(i,j,k,s)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j, k, s)\},$$

$$U_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}) = (i, j, k)\},$$

$$U_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$U_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}) = (i, j)\},$$

$$U_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j)\}$$

$$U_{(i)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}) = i\},$$

$$U_{[i]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(1)}) = i\}$$

Для будь яких $l \in L$ припустимо l^* буде набором, що містить усі компоненти l . Розглянемо набір

$$U_i^A = \{w \in U_i | \tilde{c}(w) = A\}$$

для $A \in B_{i^*}(Y)$ і $l \in L \setminus \{(i, j], [i, j]\}$.

Наступні три структурні теореми дають декомпозицію $Frt(Y)$ в трисполуку підтриїда.

Теорема 3.1. *Нехай $Frt(Y)$ – вільний триїд.*

(i) $Fr\tau(Y)$ трисполука $FRT(Y)$ підтриоїда $U_{(i,j,k,s)}, (i,j,k,s) \in FRT(Y)$. Кожний триоїд $U_{(i,j,k,s)}, (i,j,k,s) \in FRT(Y)$, напівреши́тка $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ підтриоїда $U_{(i,j,k,s)}^A, A \in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.

(ii) $Fr\tau(Y)$ трисполука $Y_{iz,rd}$ підтриоїда $U_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in Y_{iz,rd}$. Кожний триоїд $U_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in Y_{iz,rd}$, напівреши́тка $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ підтриоїда $U_{(i,j,k)}^A, A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(iii) $Fr\tau(Y)$ трисполука $Y_{rd,rz}$ підтриоїда $U_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in Y_{rd,rz}$. Кожний триоїд $U_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in Y_{rd,rz}$, напівреши́тка $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ підтриоїда $U_{[i,j,k]}^A, A \in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.

(iv) $Fr\tau(Y)$ трисполука $Y_{lz,rz}^{rb}$ підтриоїда $U_{[i,j]}, (i,j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$. Кожний триоїд $U_{[i,j]}, (i,j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$, напівреши́тка $B_{[i,j]^*}(Y)$ підтриоїда $U_{[i,j]}^A, A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.

Доведення.

(i) Визначемо відображення $\varphi_{FRT}: Fr\tau(Y) \rightarrow FRT(Y)$ в $w \mapsto (\widetilde{w}^{(0)}, \widetilde{w}^{[0]}, \widetilde{w}^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}), w \in Fr\tau(Y)$

Для довільних елементів $w, u \in Fr\tau(Y)$ отримаємо

$$\begin{aligned}
(w \dashv u) \varphi_{FRT} &= (w \widetilde{u}) \varphi_{FRT} = (\widetilde{w \widetilde{u}}^{(0)}, (w \widetilde{u})^{[0]}, (w \widetilde{u})^{[1]}, \widetilde{w \widetilde{u}}^{(1)}) \\
&= ((\widetilde{w \widetilde{u}})^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, (\widetilde{w \widetilde{u}})^{(1)}) = (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \dashv (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = w \varphi_{FRT} \dashv u \varphi_{FRT}, \\
(w \vdash u) \varphi_{FRT} &= (\widetilde{w u}) \varphi_{FRT} = (\widetilde{w u}^{(0)}, (\widetilde{w u})^{[0]}, (\widetilde{w u})^{[1]}, \widetilde{w u}^{(1)}) \\
&= ((\widetilde{w u})^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, (\widetilde{w u})^{(1)}) = (\widetilde{w}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \vdash (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = w \varphi_{FRT} \vdash u \varphi_{FRT}, \\
(w \perp u) \varphi_{FRT} &= (w u) \varphi_{FRT} = (\widetilde{w u}^{(0)}, (w u)^{[0]}, (w u)^{[1]}, \widetilde{w u}^{(1)}) \\
&= ((\widetilde{w u})^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, (\widetilde{w u})^{(1)}) = (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) \\
&= (\widetilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, w^{[1]}, \widetilde{w}^{(1)}) \perp (\widetilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, u^{[1]}, \widetilde{u}^{(1)}) = w \varphi_{FRT} \perp u \varphi_{FRT}.
\end{aligned}$$

Таким чином, φFRT є сюр'єктивним гомоморфізмом. Зрозуміло, що $U_{(i,j,k,s)}, (i,j,k,s) \in FRT(Y)$, є класом $\Delta_{\varphi FRT}$ який є підтриоїдом $Frt(Y)$. Більш того, для кожного $(i,j,k,s) \in FRT(Y)$ відображення

$$\zeta: U_{(i,j,k,s)} \rightarrow B_{(i,j,k,s)^*}(Y): w \mapsto c(\tilde{w})$$

є гомоморфізмом. Дійсно,

$$\begin{aligned} (w \dashv u)\zeta &= (w\tilde{u})\zeta = \tilde{c}(w\tilde{u}) = c\tilde{w}\tilde{u} = c(\tilde{w}\tilde{u}) = c(\tilde{w}) \cup c(\tilde{u}) = \tilde{c}(w) \cup \tilde{c}(u) \\ &= w\zeta \cup u\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w \vdash u)\zeta &= (\tilde{w}u)\zeta = \tilde{c}(\tilde{w}u) = c\tilde{\tilde{w}}\tilde{u} = c(\tilde{w}\tilde{u}) = c(\tilde{w}) \cup c(\tilde{u}) = \tilde{c}(w) \cup \tilde{c}(u) \\ &= w\zeta \cup u\zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w \perp u)\zeta &= (wu)\zeta = \tilde{c}(wu) = c\tilde{w}\tilde{u} = c(\tilde{w}\tilde{u}) = c(\tilde{w}) \cup c(\tilde{u}) = \tilde{c}(w) \cup \tilde{c}(u) \\ &= w\zeta \cup u\zeta. \end{aligned}$$

для всіх $w, u \in U_{(i,j,k,s)}$. Отже $U_{(i,j,k,s)}$ напіврешітка $B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$ підтриоїда $U_{(i,j,k,s)}^A, A \in B_{(i,j,k,s)^*}(Y)$.

$$(ii) \quad \text{Визначемо відображення} \quad \varphi_{lz,rd}: Frt(Y) \rightarrow Y_{lz,rd} \quad \text{в} \quad w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}), w \in Frt(Y)$$

Це можна перевірити $\varphi_{lz,rd}$ є сюр'єктивним гомоморфізм і

$U_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in Y_{lz,rd}$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz,rd}}$ який є підтриоїдом $Frt(Y)$.

Подібно до (i), друге твердження (ii) можна довести.

$$(iii) \quad \text{Визначемо відображення} \quad \varphi_{rd,rz}: Frt(Y) \rightarrow Y_{rd,rz} \quad \text{в} \quad w \mapsto (\tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y)$$

Це можна показати як $\varphi_{rd,rz}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і

$U_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in Y_{rd,rz}$, є класом $\Delta_{\varphi_{rd,rz}}$ який є підтриоїдом $Frt(Y)$. Як і раніше, останнє твердження в (iii) можна довести.

$$(iv) \quad \text{Визначемо відображення} \quad \varphi_{lz,rz}^{rb}: Frt(Y) \rightarrow Y_{lz,rz}^{rb} \quad \text{в} \quad w \mapsto (\tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{[1]}), w \in Frt(Y)$$

Шляхом прямої перевірки ми можемо стверджувати що $\varphi_{lz,rz}^{rb}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і $U_{[i,j]}, (i,j) \in Y_{lz,rz}^{rb}$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^{rb}}$ який є підтриоїдом $Frt(Y)$. Як і вище, друге твердження (iv) можна довести.

Для всіх $i, j, k \in Y$ нехай

$$R_{(i,j,k)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$R_{[i,j,k]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j, k)\},$$

$$R_{(i)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{[0]} = i),$$

$$R_{[i]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{[1]} = i)$$

$$R_{(i,j)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}) = (i, j)\},$$

$$R_{[i,j]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[1]}) = (i, j)\}$$

$$R_{(i,j]} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j)\},$$

$$R_{[i,j)} = \{w \in Frt(Y) | (\tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}) = (i, j)\}$$

Розглянемо набір

$$R_i^A = \{w \in R_i | \tilde{c}(w) = A\}$$

для $A \in B_{i^*}(Y)$ і $l \in L \setminus \{(i, j, k, s)\}$.

Теорема 3.2. Нехай $Frt(Y)$ – вільний триоїд.

(i) $Frt(Y)$ трисполука $(FRct(Y))^{-1}$ підтриоїда $R_{(i,j,k)}, (i, j, k) \in (FRct(Y))^{-1}$.

Кожен триоїд $R_{(i,j,k)}, (i, j, k) \in (FRct(Y))^{-1}$, напіврешітка $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ підтриоїда $R_{(i,j,k)}^A, A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(ii) $Frt(Y)$ трисполука $(FRct(Y))^{\perp}$ підтриоїда $R_{[i,j,k]}, (i, j, k) \in (FRct(Y))^{\perp}$.

Кожен триоїд $R_{[i,j,k]}, (i, j, k) \in (FRct(Y))^{\perp}$, напіврешітка $B_{[i,j,k]^*}(Y)$ підтриоїда $R_{[i,j,k]}^A, A \in B_{[i,j,k]^*}(Y)$.

(iii) $Frt(Y)$ трисполука $(Y_{lz,rz})^{-1}$ підтриоїда $R_{(i)}, i \in (Y_{lz,rz})^{-1}$. Кожен триоїд

$R_{(i)}, i \in (Y_{lz,rz})^{-1}$, напіврешітка $B_{\{i\}}(Y)$ підтриоїда $R_{\{i\}}^A, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

(iv) $Frt(Y)$ триполука $(Y_{lz,rz})^\perp$ підтриїда $R_{[i]}, i \in (Y_{lz,rz})^\perp$. Кожен триїд $R_{[i]}, i \in (Y_{lz,rz})^\perp$, напіврешітка $B_{\{i\}}(Y)$ підтриїда $R_{[i]}^A, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

Доведення.

(i) Визначемо відображення $\varphi_{FRct}^\perp: Frt(Y) \rightarrow (FRct(Y))^\perp$ в $w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y)$

Для будь-якого $w, u \in Frt(Y)$ отримаємо

$$\begin{aligned} (w \dashv u) \varphi_{FRct}^\perp &= (w\tilde{u}) \varphi_{FRct}^\perp = (\tilde{w}\tilde{u}^{(0)}, (w\tilde{u})^{[0]}, \tilde{w}\tilde{u}^{(1)}) \\ &= ((\tilde{w}\tilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, (\tilde{w}\tilde{u})^{(1)}) = (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) \\ &\dashv (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = w \varphi_{FRct}^\perp \dashv u \varphi_{FRct}^\perp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (w \perp u) \varphi_{FRct}^\perp &= (wu) \varphi_{FRct}^\perp = (\tilde{w}\tilde{u}^{(0)}, (wu)^{[0]}, \tilde{w}\tilde{u}^{(1)}) = ((\tilde{w}\tilde{u})^{(0)}, w^{[0]}, (\tilde{w}\tilde{u})^{(1)}) \\ &= (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = (\tilde{w}^{(0)}, w^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}) \perp (\tilde{u}^{(0)}, u^{[0]}, \tilde{u}^{(1)}) = w \varphi_{FRct}^\perp \\ &\perp u \varphi_{FRct}^\perp. \end{aligned}$$

Так само для \vdash . Так, φ_{FRct}^\perp є сюр'єктивним гомоморфізмом. Очевидно, що $R_{(i,j,k)}, (i,j,k) \in (FRct(Y))^\perp$, є класом $\Delta_{\varphi_{FRct}^\perp}$ який є підтриїдом $Frt(Y)$. Крім того, це не важко довести для кожного $(i,j,k) \in (FRct(Y))^\perp$ the map

$$R_{(i,j,k)} \rightarrow B_{(i,j,k)^*}(Y): w \mapsto \tilde{c}(w)$$

є гомоморфізм. Отже $R_{(i,j,k)}$ напіврешітка $B_{(i,j,k)^*}(Y)$ підтриїда $R_{(i,j,k)}^A, A \in B_{(i,j,k)^*}(Y)$.

(ii) Визначемо відображення $\varphi_{FRct}^\vdash: Frt(Y) \rightarrow (FRct(Y))^\vdash$ в $w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y)$

Не важко показати, що φ_{FRct}^\vdash є сюр'єктивним гомоморфізмом і

$R_{[i,j,k]}, (i,j,k) \in (FRct(Y))^\vdash$, є класом $\Delta_{\varphi_{FRct}^\vdash}$ який є підтриїдом $Frt(Y)$.

Подібно до випадку (i), друге твердження (ii) може бути доведено.

(iii) Визначемо відображення $\varphi_{lz,rz}^\perp: Frt(Y) \rightarrow (Y_{lz,rz})^\perp$ в $w \mapsto w^{[0]}, w \in Frt(Y)$

Ми можемо показати, що $\varphi_{lz,rz}^\perp$ є сюр'єктивним гомоморфізмом $R_{(i)}, i \in (Y_{lz,rz})^\perp$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^\perp}$ який є підтриоїдом $Fr t(Y)$. Подібно до (i), останнє твердження (iii) може бути доведено.

(iv) Визначемо відображення $\varphi_{lz,rz}^\perp: Fr t(Y) \rightarrow (Y_{lz,rz})^\perp$ в $w \mapsto w^{[1]}, w \in Fr t(Y)$.

Негайно перевіримо, що $\varphi_{lz,rz}^\perp$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і $R_{[i]}, i \in (Y_{lz,rz})^\perp$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz,rz}^\perp}$ який є підтриоїдом of $Fr t(Y)$. Як і вище, друге твердження (iv) можна довести.

Теорема 3.3. *Нехай $Fr t(Y)$ - вільний триоїд.*

(i) $Fr t(Y)$ триполука $(Y_{lz,rb})^\perp$ підтриоїда $R_{(i,j)}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$. Кожен триоїд $R_{(i,j)}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$, напіврешітка $B_{(i,j)^*}(Y)$ підтриоїда $R_{(i,j)}^A, A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(ii) $Fr t(Y)$ триполука $(Y_{lz,rb})^\perp$ підтриоїда $R_{[i,j]}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$. Кожен триоїд $R_{[i,j]}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$, напіврешітка $B_{[i,j]^*}(Y)$ підтриоїда $R_{[i,j]}^A, A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.

(iii) $Fr t(Y)$ триполука $(Y_{rb,rz})^\perp$ підтриоїда $R_{(i,j)}, i \in (Y_{rb,rz})^\perp$. Кожен триоїд $R_{(i,j)}, i \in (Y_{rb,rz})^\perp$, напіврешітка $B_{(i,j)^*}(Y)$ підтриоїда $R_{(i,j)}^A, A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.

(iv) $Fr t(Y)$ триполука $(Y_{rb,rz})^\perp$ підтриоїда $R_{[i,j]}, i \in (Y_{rb,rz})^\perp$. Кожен триоїд $R_{[i,j]}, i \in (Y_{rb,rz})^\perp$, напіврешітка $B_{[i,j]^*}(Y)$ підтриоїда $R_{[i,j]}^A, A \in B_{[i,j]^*}(Y)$.

Доведення.

(i) Визначемо відображення $\varphi_{lz,rb}^\perp: Fr t(Y) \rightarrow (Y_{lz,rb})^\perp$ в $w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[0]}), w \in Fr t(Y)$.

Ми можемо прямо довести, що $\varphi_{lz,rb}^\perp$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і $R_{(i,j)}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^\perp$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz,rb}^\perp}$ який є підтриоїдом of $Fr t(Y)$. Подібно до (i) з Теорема 3.1 можна довести друге твердження (i).

- (ii) Визначемо відображення $\varphi_{lz,rb}^{\vdash}: Frt(Y) \rightarrow (Y_{lz,rb})^{\vdash}$ в $W \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{[1]}), w \in Frt(Y)$.

Це можна легко перевірити $\varphi_{lz,rb}^{\vdash}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і $R_{[i,j]}, (i,j) \in (Y_{lz,rb})^{\vdash}$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz,rb}^{\vdash}}$ який є підтриоїдом $Frt(Y)$.

Так само, як і вище, можна довести друге твердження (ii).

- (iii) Визначемо відображення $\varphi_{rb,rz}^{\dashv}: Frt(Y) \rightarrow (Y_{rb,rz})^{\dashv}$ в $W \mapsto (\tilde{w}^{[0]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y)$.

Безпосередньою перевіркою ми можемо стверджувати, що $\varphi_{rb,rz}^{\dashv}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і $R_{(i,j]}, i \in (Y_{rb,rz})^{\dashv}$, є класом $\Delta_{\varphi_{rb,rz}^{\dashv}}$ який є підтриоїдом $Frt(Y)$. Як і раніше, останнє твердження (iii) можна довести.

- (iv) Визначемо відображення $\varphi_{rb,rz}^{\vdash}: Frt(Y) \rightarrow (Y_{rb,rz})^{\vdash}$ в $W \mapsto (\tilde{w}^{[1]}, \tilde{w}^{(1)}), w \in Frt(Y)$.

Можна довести, що $\varphi_{rb,rz}^{\vdash}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом і $R_{[i,j)}, i \in (Y_{rb,rz})^{\vdash}$, є класом $\Delta_{\varphi_{rb,rz}^{\vdash}}$ який є підтриоїдом of $Frt(Y)$.

Подібно до (i) з Теорема 3.1 можна довести друге твердження (iv).

Наступна структура Теорема дає декомпозицію $Frt(Y)$ в сполуку підтриоїда.

Теорема 3.4. *Нехай $Frt(Y)$ - вільний триоїд.*

- (i) $Frt(Y)$ прямокутна сполука Y_{rb} підтриоїда $U_{(i,j)}, (i,j) \in Y_{rb}$. Кожен триоїд $U_{(i,j)}, (i,j) \in Y_{rb}$, напіврешітка $B_{(i,j)^*}(Y)$ підтриоїда $U_{(i,j)}^A, A \in B_{(i,j)^*}(Y)$.
- (ii) $Frt(Y)$ є лівою сполукою Y_{lz} підтриоїда $U_{(i)}, i \in Y_{lz}$. Кожен триоїд $U_{(i)}, i \in Y_{lz}$, напіврешітка $B_{\{i\}}(Y)$ підтриоїда $U_{(i)}^A, A \in B_{\{i\}}(Y)$.

- (iii) $Frt(Y)$ є правою сполукою Y_{rz} підтриїда $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$. Кожен триїд $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$, напівреши́тка $B_{\{i\}}(Y)$ підтриїда $U_{[i]}^A$, $A \in B_{\{i\}}(Y)$.

Доведення.

- (i) Визначемо відображення $\varphi_{rb}: Frt(Y) \rightarrow Y_{rb}$ в $w \mapsto (\tilde{w}^{(0)}, \tilde{w}^{(1)})$, $w \in Frt(Y)$.

Можна перевірити, що φ_{rb} є сюр'єктивним гомоморфізмом і $U_{(i,j)}$, $(i,j) \in Y_{rb}$, є класом $\Delta_{\varphi_{rb}}$ який є підтриїдом of $Frt(Y)$. Подібно до (i) з Теорема 3.1 можна довести останнє твердження (i).

- (ii) Визначемо відображення $\varphi_{lz}: Frt(Y) \rightarrow Y_{lz}$ в $w \mapsto \tilde{w}^{(0)}$, $w \in Frt(Y)$.

Легко показати, що φ_{lz} є сюр'єктивним гомоморфізмом і $U_{(i)}$, $i \in Y_{lz}$, є класом $\Delta_{\varphi_{lz}}$ який є підтриїдом $Frt(Y)$. Як і вище, друге твердження (ii) може бути доведено.

- (i) Визначемо відображення $\varphi_{rz}: Frt(Y) \rightarrow Y_{rz}$ за $w \mapsto \tilde{w}^{(1)}$, $w \in Frt(Y)$.

Можна легко перевірити, що φ_{rz} є сюр'єктивним гомоморфізмом і $U_{[i]}$, $i \in Y_{rz}$, є класом $\Delta_{\varphi_{rz}}$ який є підтриїдом of $Frt(Y)$. Як і раніше, останнє твердження (iii) можна довести.

Якщо ρ є конгруенцією на триїді (T, \neg, \vdash, \perp) , такі, що операції з $(T, \neg, \vdash, \perp) / \rho$ збігаються і це прямокутна сполука (відповідно, напівгрупа лівих нулів, напівгрупа правих нулів), тоді ми говоримо, що ρ прямокутна сполука конгруентна (відповідно, конгруенція, конгруенція правих нулів). З Теорема 3.4 отримуємо

Наслідок 1. Нехай $Frt(Y)$ - вільний триїд.

- (i) $\Delta_{\varphi_{rb}}$ є найменшою прямокутною сполукою конгруенції на $Frt(Y)$.
(ii) $\Delta_{\varphi_{lz}}$ є найменшою конгруенцією лівих нулів на $Frt(Y)$.
(iii) $\Delta_{\varphi_{rz}}$ є найменшою конгруенцією правих нулів на $Frt(Y)$.

Доведення. (i) Відомо, що Y_{rb} є вільною прямокутною сполукою. За Теоремою 3.4 (i) отримуємо (i).

РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА ТРІОЇДІВ

У цьому розділі побудовано новий клас тріоїдів. А саме, представлено клас тріоїдів з трьома прямокутними напівгрупами, які не є сполуками.

3.1. *rs*-тріоїди

У цьому підрозділі розглядається наступна відкрита проблема.

Проблема. Чи існують тріоїди з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи є прямокутними та не є сполуками ?

Як відмічалось у вступі, ця проблема виникла вперше при вивченні допельнапівгруп [13]. Так, з роботи [14] випливає, що існують допельнапівгрупи з різними операціями, у яких дві напівгрупи є прямокутними. У [13] вказано, що не існує допельнапівгруп з різними операціями, у яких дві напівгрупи є прямокутними сполуками. Для класу тріоїдів у роботі [12] було встановлено, що існують тріоїди з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи є прямокутними сполуками. При цьому вказана вище проблема залишалась до чого часу відкритою.

У наступному підрозділі доведено, що клас тріоїдів містить тріоїди з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи є прямокутними напівгрупами та не є сполуками.

Напівгрупа S називається *прямокутною*, якщо $xuz = xz$ для всіх $x, u, z \in S$. Таким чином, прямокутні напівгрупи отримуються з прямокутних сполук відкиданням тотожності $x^2 = x$. Наприклад, напівгрупи з нульовим множенням ($xu = zu$) є прямокутними напівгрупами. Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо *rs-тріоїдом*, якщо напівгрупи (T, \dashv) , (T, \vdash) та (T, \perp) є прямокутними, тобто виконуються тотожності:

$$x \dashv y \dashv z = x \dashv z, \quad (1)$$

$$x \vdash y \vdash z = x \vdash z, \quad (2)$$

$$x \perp y \perp z = x \perp z \quad (3)$$

для всіх $x, y, z \in T$. Очевидно, що будь-який прямокутний тріюїд є rs -тріюїдом.

Нехай X – довільна непорожня множина і $X^4 = X \times X \times X \times X$. Визначимо операції \dashv , \vdash та \perp на $X \cup X^4$ за правилами:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, y_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, y_2, y_3, y_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, y_3, y_4),$$

$$x \dashv (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, x, x, x_4),$$

$$x \vdash (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, x_2, x_3, x_4),$$

$$x \perp (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, x, x_3, x_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv x = (x_1, x_2, x_3, x),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash x = (x_1, x, x, x),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \perp x = (x_1, x_2, x, x),$$

$$x \dashv y = (x, x, x, y),$$

$$x \vdash y = (x, y, y, y),$$

$$x \perp y = (x, x, y, y),$$

для всіх $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in X^4$ і $x, y \in X$. Отримана алгебра буде позначатися як $T_{rs}(X)$. Задача побудови такої алгебри була сформульована в [15].

3.2. Доведення основного результату

У цьому підрозділі доведено основний результат роботи – теорему 2.1.

Теорема 3.1. Клас rs -тріюїдів містить тріюїди з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи не є сполуками.

Доведення. Доведення випливає з лем 3.2.–3.16.

У цьому підрозділі довільні елементи $T_{rs}(X)$ будемо позначати через $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)$ та (z_1, z_2, z_3, z_4) .

Лема 3.2. Операція \dashv алгебри $T_{rs}(X)$ є асоціативною.

Доведення.

$$1. \quad ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$$

- $$\begin{aligned}
&= (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
2. \quad &(x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, x, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, x, z_4) = x \dashv (y_1, y_2, y_3, z_4) = \\
&= x \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
3. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, y, y, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
4. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv z = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z); \\
5. \quad &(x \dashv y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, x, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, x, z_4) = x \dashv (y, y, y, z_4) = x \dashv (y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
6. \quad &(x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z = (x, x, x, y_4) \dashv z = (x, x, x, z) = \\
&= x \dashv (y_1, y_2, y_3, z) = x \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z); \\
7. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, y) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, y, y, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y \dashv z); \\
8. \quad &(x \dashv y) \dashv z = (x, x, x, y) \dashv z = (x, x, x, z) = \\
&= x \dashv (y, y, y, z) = x \dashv (y \dashv z);
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.3. Операція \vdash алгебри $T_{rs}(X)$ є асоціативною.

Доведення.

- $$\begin{aligned}
1. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
2. \quad & (x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
3. \quad & ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, y, y, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
4. \quad & ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash z = \\
&= (x_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z = (x_1, z, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, z, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \\
5. \quad & (x \vdash y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, y, y, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y, z_2, z_3, z_4) = \\
&= x \vdash (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
6. \quad & (x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash z = (x, y_2, y_3, y_4) \vdash z = \\
&= (x, z, z, z) = x \vdash (y_1, z, z, z) = x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \\
7. \quad & ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y) \vdash z = (x_1, y, y, y) \vdash z = (x_1, z, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, z, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \vdash z); \\
8. \quad & (x \vdash y) \vdash z = (x, y, y, y) \vdash z = (x, z, z, z) = \\
&= x \vdash (y, z, z, z) = x \vdash (y \vdash z);
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.4. Операція \perp алгебри $T_{rs}(X)$ є асоціативною.

Доведення.

- $$\begin{aligned}
1. \quad & ((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) =
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&= (x_1, x_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
2. \quad &((x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)) = \\
&= (x, x, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, z_3, z_4) = x \perp (y_1, y_2, z_3, z_4) = \\
&= x \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
3. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, y, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y, y, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
4. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp z = \\
&= (x_1, x_2, y_3, y_4) \perp z = (x_1, x_2, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z); \\
5. \quad &(x \perp y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, y, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, z_3, z_4) = x \perp (y, y, z_3, z_4) = x \perp (y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
6. \quad &(x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp z = (x, x, y_3, y_4) \perp z = (x, x, z, z) = \\
&= x \perp (y_1, y_2, z, z) = x \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z); \\
7. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y) \perp z = (x_1, x_2, y, y) \perp z = (x_1, x_2, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y, y, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y \perp z); \\
8. \quad &(x \perp y) \perp z = (x, x, y, y) \perp z = (x, x, z, z) = \\
&= x \perp (y, y, z, z) = x \perp (y \perp z);
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.5. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (T1) тріюїда.

Доведення.

- $$\begin{aligned}
1. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, z_2, z_3, z_4) =
\end{aligned}$$

- $$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4));$$
2.
$$\begin{aligned} (x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x, x, x, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, x, x, z_4) = x \dashv (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= x \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
 3.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, x_2, x_3, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
 4.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z &= (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv z = \\ &= (x_1, x_2, x_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, z, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \end{aligned}$$
 5.
$$\begin{aligned} (x \dashv y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (x, x, x, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, x, x, z_4) = x \dashv (y, z_2, z_3, z_4) = x \dashv (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
 6.
$$\begin{aligned} (x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z &= (x, x, x, y_4) \dashv z = \\ &= (x, x, x, z) = x \dashv (y_1, z, z, z) = x \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \end{aligned}$$
 7.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \dashv z &= (x_1, x_2, x_3, y) \dashv z = \\ &= (x_1, x_2, x_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, z, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y \vdash z); \end{aligned}$$
 8.
$$\begin{aligned} (x \dashv y) \dashv z &= (x, x, x, y) \dashv z = (x, x, x, z) = \\ &= x \dashv (y, z, z, z) = x \dashv (y \vdash z); \end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.6. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (T2) тріюїда.

Доведення.

1.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, y_2, y_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, y_2, y_3, z_4) = x \vdash (y_1, y_2, y_3, z_4) = \\ &= x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (x_1, y, y, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, y, y, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, y, y, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z &= (x_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z = \\ &= (x_1, y_2, y_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z); \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} (x \vdash y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x, y, y, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, y, y, z_4) = \\ &= x \vdash (y, y, y, z_4) = x \vdash (y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned} (x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z &= (x, y_2, y_3, y_4) \dashv z = (x, y_2, y_3, z) = \\ &= x \vdash (y_1, y_2, y_3, z) = x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z); \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y) \dashv z &= (x_1, y, y, y) \dashv z = (x_1, y, y, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, y, y, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \dashv z); \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} (x \vdash y) \dashv z &= (x, y, y, y) \dashv z = (x, y, y, z) = \\ &= x \vdash (y, y, y, z) = x \vdash (y \dashv z); \end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.7. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (ТЗ) тріюїда.

Доведення.

1.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, x_2, x_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
2.
$$(x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$$

- $$\begin{aligned}
&= (x, x, x, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
3. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
4. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash z = (x_1, x_2, x_3, y_4) \vdash z = \\
&= (x_1, z, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, z, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \\
5. \quad &(x \dashv y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, x, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
6. \quad &(x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash z = (x, x, x, y_4) \vdash z = (x, z, z, z) = \\
&= x \vdash (y_1, z, z, z) = x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \\
7. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \vdash z = (x_1, x_2, x_3, y) \vdash z = (x_1, z, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, z, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \vdash z); \\
8. \quad &(x \dashv y) \vdash z = (x, x, x, y) \vdash z = (x, z, z, z) = \\
&= x \vdash (y, z, z, z) = x \vdash (y \vdash z);
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.8. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (Т4) тріюїда.

Доведення.

- $$\begin{aligned}
1. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
2. \quad &(x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, x, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&= (x, x, x, z_4) = x \dashv (y_1, y_2, z_3, z_4) = \\
&= x \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
3. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, y, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
4. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv z = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, z, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z); \\
5. \quad &(x \dashv y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, x, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, x, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, y, z_3, z_4) = \\
&= x \dashv (y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
6. \quad &(x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z = (x, x, x, y_4) \dashv z = (x, x, x, z) = \\
&= x \dashv (y_1, y_2, z, z) = x \dashv ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z); \\
7. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, y) \dashv z = \\
&= (x_1, x_2, x_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y, y, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y \perp z); \\
8. \quad &(x \dashv y) \dashv z = (x, x, x, y) \dashv z = (x, x, x, z) = \\
&= x \dashv (y, y, z, z) = x \dashv (y \perp z);
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.9. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (T5) тріюїда.

Доведення.

- $$\begin{aligned}
1. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, y_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
2. \quad &(x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&= (x, x, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, y_3, z_4) = x \perp (y_1, y_2, y_3, z_4) = \\
&= x \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
3. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, y, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, y, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y, y, y, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
4. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z = \\
&= (x_1, x_2, y_3, y_4) \dashv z = (x_1, x_2, y_3, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z); \\
5. \quad &(x \perp y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, y, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x, x, y, z_4) = x \perp (y, y, y, z_4) = x \perp (y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4)); \\
6. \quad &(x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \dashv z = (x, x, y_3, y_4) \dashv z = \\
&= (x, x, y_3, z) = x \perp (y_1, y_2, y_3, z) = x \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z); \\
7. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y) \dashv z = (x_1, x_2, y, y) \dashv z = \\
&= (x_1, x_2, y, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y, y, y, z) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y \dashv z); \\
8. \quad &(x \perp y) \dashv z = (x, x, y, y) \dashv z = (x, x, y, z) = \\
&= x \perp (y, y, y, z) = x \perp (y \dashv z);
\end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.10. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (Т6) тріюїда.

Доведення.

- $$\begin{aligned}
1. \quad &((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\
&= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4));
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x, x, x, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, x, z_3, z_4) = x \perp (y_1, y_2, z_3, z_4) = \\ &= x \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, x_2, x_3, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp z &= \\ &= (x_1, x_2, x_3, y_4) \perp z = (x_1, x_2, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, z, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} (x \dashv y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (x, x, x, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, x, z_3, z_4) = x \perp (y, z_2, z_3, z_4) = x \perp (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned} (x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp z &= (x, x, x, y_4) \perp z = \\ &= (x, x, z, z) = x \perp (y_1, z, z, z) = x \perp ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z); \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y) \perp z &= (x_1, x_2, x_3, y) \perp z = \\ &= (x_1, x_2, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y, z, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y \vdash z); \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} (x \dashv y) \perp z &= (x, x, x, y) \perp z = (x, x, z, z) = \\ &= x \perp (y, z, z, z) = x \perp (y \vdash z); \end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.11. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (Т7) тріюїда.

Доведення.

1.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, y_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, z_3, z_4) = \end{aligned}$$

- $$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4));$$
2.
$$\begin{aligned} (x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, y_2, z_3, z_4) = x \vdash (y_1, y_2, z_3, z_4) = \\ &= x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
 3.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, y, y, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, y, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, y, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
 4.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp z &= (x_1, y_2, y_3, y_4) \perp z = \\ &= (x_1, y_2, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z); \end{aligned}$$
 5.
$$\begin{aligned} (x \vdash y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) &= (x, y, y, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x, y, z_3, z_4) = x \vdash (y, y, z_3, z_4) = x \vdash (y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$
 6.
$$\begin{aligned} (x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4)) \perp z &= (x, y_2, y_3, y_4) \perp z = (x, y_2, z, z) = \\ &= x \vdash (y_1, y_2, z, z) = x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z); \end{aligned}$$
 7.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y) \perp z &= (x_1, y, y, y) \perp z = (x_1, y, z, z) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, y, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \perp z); \end{aligned}$$
 8.
$$\begin{aligned} (x \vdash y) \perp z &= (x, y, y, y) \perp z = (x, y, z, z) = \\ &= x \vdash (y, y, z, z) = x \vdash (y \perp z); \end{aligned}$$

Лему доведено.

Лема 3.12. $T_{rs}(X)$ задовольняє аксіому (T8) тріюїда.

Доведення.

1.
$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) &= \\ &= (x_1, x_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, z_2, z_3, z_4) = \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4)); \end{aligned}$$

2. $(x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, x, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y_1, y_2, z_3, z_4) =$
 $= x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4));$
3. $((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, x_2, y, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4));$
4. $((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash z = (x_1, x_2, y_3, y_4) \vdash z =$
 $= (x_1, z, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, z, z, z) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z);$
5. $(x \perp y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, y, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (y, z_2, z_3, z_4) =$
 $= x \vdash (y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4));$
6. $(x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4)) \vdash z = (x, x, y_3, y_4) \vdash z =$
 $= (x, z, z, z) = x \vdash (y_1, z, z, z) =$
 $= x \vdash ((y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z);$
7. $((x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y) \vdash z = (x_1, x_2, y, y) \vdash z =$
 $= (x_1, z, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y, z, z, z) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y \vdash z);$
8. $(x \perp y) \vdash z = (x, x, y, y) \vdash z = (x, z, z, z) =$
 $= x \vdash (y, z, z, z) = x \vdash (y \vdash z);$

Лему доведено.

Лема 3.13. $T_{rs}(X)$ задовольняє тотожність (1).

Доведення.

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$

- $$= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4);$$
2. $x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, x, x, y_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, x, x, z_4) = x \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4);$
 3. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4);$
 4. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, y_4) \dashv z =$
 $= (x_1, x_2, x_3, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv z;$
 5. $x \dashv y \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, x, y) \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, x, x, z_4) = x \dashv (z_1, z_2, z_3, z_4);$
 6. $x \dashv (y_1, y_2, y_3, y_4) \dashv z = (x, x, x, y_4) \dashv z = (x, x, x, z) = x \dashv z;$
 7. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv y \dashv z = (x_1, x_2, x_3, y) \dashv z = (x_1, x_2, x_3, z) =$
 $= (x_1, x_2, x_3, x_4) \dashv z;$
 8. $(x \dashv y) \dashv z = (x, x, x, y) \dashv z = (x, x, x, z) = x \dashv z;$

Лему доведено.

Лема 3.14. $T_{rs}(X)$ задовольняє тотожність (2).

Доведення.

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4);$
2. $x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, y_2, y_3, y_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4);$
3. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, y, y, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$
 $= (x_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4);$
4. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z = (x_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z =$
 $= (x_1, z, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash z;$
5. $x \vdash y \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, y, y, y) \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4) =$

$$= (x, z_2, z_3, z_4) = x \vdash (z_1, z_2, z_3, z_4);$$

$$6. \quad x \vdash (y_1, y_2, y_3, y_4) \vdash z = (x, y_2, y_3, y_4) \vdash z = (x, z, z, z) = x \vdash z;$$

$$7. \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash y \vdash z = (x_1, y, y, y) \vdash z = (x_1, z, z, z) = \\ = (x_1, x_2, x_3, x_4) \vdash z;$$

$$8. \quad (x \vdash y) \vdash z = (x, y, y, y) \vdash z = (x, z, z, z) = x \vdash z;$$

Лему доведено.

Лема 3.15. $T_{rs}(X)$ задовольняє тотожність (3).

Доведення.

$$1. \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ = (x_1, x_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ = (x_1, x_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4);$$

$$2. \quad x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, y_3, y_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ = (x, x, z_3, z_4) = x \perp (z_1, z_2, z_3, z_4);$$

$$3. \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, y, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ = (x_1, x_2, z_3, z_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4);$$

$$4. \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z = (x_1, x_2, y_3, y_4) \perp z = \\ = (x_1, x_2, z, z) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp z;$$

$$5. \quad x \perp y \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = (x, x, y, y) \perp (z_1, z_2, z_3, z_4) = \\ = (x, x, z_3, z_4) = x \perp (z_1, z_2, z_3, z_4);$$

$$6. \quad x \perp (y_1, y_2, y_3, y_4) \perp z = (x, x, y_3, y_4) \perp z = (x, x, z, z) = x \perp z;$$

$$7. \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp y \perp z = (x_1, x_2, y, y) \perp z = (x_1, x_2, z, z) = \\ = (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp z;$$

$$8. \quad x \perp y \perp z = (x, x, y, y) \perp z = (x, x, z, z) = x \perp z;$$

Лему доведено.

Лема 3.16. $T_{rs}(X)$ є rs-тріюдом, операції якого не є ідемпотентними.

Доведення. З лем 3.2–3.15 випливає, що $T_{rs}(X)$ є rs-тріюдом. З визначення операцій \dashv, \vdash та \perp алгебри $T_{rs}(X)$ випливає, що

$$x \dashv x = (x, x, x, x), x \vdash x = (x, x, x, x), x \perp x = (x, x, x, x)$$

для всіх $x \in X$, а це означає, що вказані операції не є ідемпотентними.

Лему доведено.

Твердження 3.17. Множиною усіх ідемпотентів в $T_{rs}(X) \in X \times X \times X \times X$

Доведення. Нехай $(a, b, c, d) \in X \times X \times X \times X$. Тоді

$$(a, b, c, d) \dashv (a, b, c, d) = (a, b, c, d)$$

$$(a, b, c, d) \vdash (a, b, c, d) = (a, b, c, d)$$

$$(a, b, c, d) \perp (a, b, c, d) = (a, b, c, d).$$

При цьому

$$x \dashv x = (x, x, x, x),$$

$$x \vdash x = (x, x, x, x),$$

$$x \perp x = (x, x, x, x).$$

Одже (a, b, c, d) – ідемпотент, а X не є ідемпотентом.

Твердження доведено.

Перспективи дослідження

У подальшому плануємо побудувати вільну алгебру в класі всіх rs-тріюїдів та опублікувати статтю у міжнародному науковому журналі, який індексується в наукометричній базі Scopus або Web of Science.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі побудовано новий приклад rs-тріюїда з попарно різними операціями, у якого три напівгрупи не є сполуками.

ВИСНОВКИ

У цій роботі наведено основні визначення теорії тріюїдів. Представлено вільну прямокутну трисполуку, підраховано кількість елементів вільної прямокутної трисполуки у скінченному випадку та описано групу автоморфізмів вільної прямокутної трисполуки. Основним результатом роботи є побудова нового класу rs -тріюїдів з попарно різними операціями, у яких три напівгрупи не є сполуками (теорема 2.1). Відкритим у цьому напрямі залишається питання побудови вільної алгебри в класі всіх rs -тріюїдів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Clifford A. H. Bands of semigroups / A. H. Clifford // Proc. Amer. Math. Soc. – **5**. – 1954. – P. 499–504.
2. Loday J.-L. Trialgebras and families of polytopes/ M. O.Ronco, J.-L. Loday // Contemp. Math. – **346**. – 2004. – P. 369–398.
3. Loday J.-L. Dialgebras / J.-L. Loday // In: Dialgebras and related operads Lect. Notes Math. – **1763**. – Springer-Verlag, Berlin. – 2001. – P. 7–66.
4. McLean D. Idempotent semigroups / D. McLean // Amer. Math. Monthly – **61**. – 1954. – P. 110–113.
5. Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids / A. V. Zhuchok // Mat. Stud. – **33**. – 2010. – P. 120–124.
6. Zhuchok A. V. Dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra and Logic – **50**. – 2011. – no. 4, P. 323–340.
7. Zhuchok A. V. Free rectangular dibands and free dimonoids / A.V. Zhuchok // Algebra and Discrete Math. – **11**. – 2011. – no. 2, P. 92–111.
8. Zhuchok A. V. Semilattices of subdimonoids / A. V. Zhuchok // Asian-Eur. J. Math. – **4**. – 2011. – no. 2, P. 359–371.
9. Zhuchok A. V. Some congruences on trioids / A. V. Zhuchok // Journal of Mathematical Sciences – **187**. – 2012. – no. 2, P. 138–145.
10. Zhuchok A. V. Tribands of subtrioids / A. V. Zhuchok // Proc. Inst. Applied Math. and Mech. – **21**. – 2010. – P. 98–106.
11. Zhuchok A. V. Trioids / A. V. Zhuchok // Asian-Eur. J. Math. – **8**. – 2015. – no. 4, 1550089.
12. Zhuchok Yul. V. Free rectangular tribands / Yul. V. Zhuchok // Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica. – **78**. – 2015. – no. 2, P. 61–73.
13. Zhuchok A. V. Free products of doppelsemigroups / A. V. Zhuchok // Algebra Universalis. – **77**. – 2017. – no. 3, P. 361–374.

14. Zhuchok A. V. Free rectangular doppelsemigroups / A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok, J. Koppitz // Journal of Algebra and its Applications. – 19. – 2020. – no. 11, 2050205.
15. Жидков Є. Ю. Про один клас тріюїдів / Є. Ю. Жидков // І Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених. «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2020» Форум молодих дослідників». –2020. – С. 34.
16. Жучок А. В. Елементи теорії дімоноїдів / А. В. Жучок – К. : Ін-т математики, 2014. – 304 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України ; т. 98).